1997/8 א

שאלה 2

הערה : לכל אורך התשובה נשתמש ב i להיות אינדקס לשוכרים ו j אינדקס לחדרים. קבוצת השוכרים תהיה $I=\{1,2,....,N\}$ וקבוצת החדרים תהייה $J=\{1,2,....,N\}$.

1. **הקצאה יעילה** היא הקצאה של פרטים לחדרים שתסומן ע"י הפרמוטציה s(i) (פרט i מקבל את החדר (s(i)) כך שלא קיימת הקצאה אחרת m(i) שמקיימת :

$$[3]\quad \forall i:\ V(i,\mu(i)) \geq V(i,\sigma(i))$$

וגם : $$[4]\quad \exists i_0:\ V(i_0,\mu(i_0)) > V(i_0,\sigma(i_0))$$

(ובאופן מילולי : אין אפשרות להקצות את הפרטים בין החדרים כך שמצבו של אף אחד לא יורע ומצבו של פרט אחד לפחות ישתפר ממש)

2. **שווי משקל תחרותי** הוא $(\{P_j\},\sigma(i))$: וקטור מחירים $\{P_j\}$ והקצאה של פרטים לחדרים s(i) כך שמתקיימים שני התנאים הבאים :

$$[1]\quad \forall j\in J:\qquad P_j \geq 0$$ (לכל משכיר תמורה אי שלילית)

$$[2]\quad \forall i\in I, j\in J: V(i,\sigma(i)) - P_{\sigma(i)} \geq V(i,j) - P_j$$ (לכל שוכר אין אלטרנטיבה טובה יותר)

3. יהי שווי משקל $(\{P_j\},\sigma(i))$. אזי אם ניקח וקטור מחירים אחר שיוגדר ע"י $q_j = P_j + a$ כאשר $a>0$ גם $(\{q_j\},\sigma(i))$ יהיה שווי משקל. כלומר, אם כל המחירים יגדלו באותו קבוע עדיין נקבל שווי משקל. שכן : אם כל המחירים P_j אי שליליים אז כל המחירים q_j אי שליליים גם כן (למעשה חיוביים ממש), וכן הגדלת כל המחירים בקבוע מורידה אמנם את "הרווח" של השוכרים אולם לא משנה את המדרוג בין החדרים השונים (בביטוי [2] הערך של שני אגפי האי שיוויון יורד ב a), ולכן עדיין אין לאף אחד מן הפרטים אלטרנטיבה טובה יותר. (הערה : לשוכר כלשהו אין אפשרות שלא לשכור חדר כלל). לכן $(\{q_j\},\sigma(i))$ מקיים את התנאים [1] ו [2] וגם הוא יהיה שווי משקל תחרותי.

כלומר, וקטור מחירי שווי משקל איננו יחיד.

4. <u>הוכחה למקרה N=2 :</u>

נתון שווי משקל תחרותי וצריך להראות כי ההקצאה המתקבלת ממנו יעילה. בלי הגבלת הכלליות נניח כי בהקצאת שווי משקל פרט 1 שוכר את חדר 1 ופרט 2 שוכר את חדר 2. אם כך תנאי [2] עבור פרט 1 יהיה : $V(1,1)-P_1 \geq V(1,2)-P_2$ (אין ל 1 אלטרנטיבה טובה יותר) ואותו תנאי עבור פרט 2 יהיה : $V(2,2)-P_2 \geq V(2,1)-P_1$

ע"י חיבור שני האישיוויונים האחרונים נקבל : $V(1,1)+V(2,2) \geq V(1,2)+V(2,1)$ [5]

אבל זה מבטיח את יעילות ההקצאה שכן אם $V(1,1) \leq V(1,2)$ וגם $V(2,2) \leq V(2,1)$ אזי [5] מבטיח כי בהכרח שני האישיוויונים החלשים מתקיימים כשיוויונות, ולכן אם בהחלפת החדרים בין הפרטים שניהם לא מפסידים הרי שגם אף אחד מהם לא מרויח ממש, ולכן הקצאת שווי משקל תחרותי היא יעילה.

<u>הוכחה למקרה הכללי (N כלשהו) :</u>

יהי $\left(\{P_j\},\sigma(i)\right)$ שווי משקל תחרותי. נוכיח בשלילה כי s(i) הקצאה יעילה.

נניח כי s(i) איננה הקצאה יעילה : אזי קיימת הקצאה אחרת m(i) כך ש :

$$[6]\ \forall i:\ V(i,\mu(i)) \geq V(i,\sigma(i))$$

וגם

$$[7]\ \exists i_0:\ V(i_0,\mu(i_0)) > V(i_0,\sigma(i_0))$$

מכיוון שההקצאה s(i) התקבלה משווי משקל תחרותי הרי שלכל פרט i אין אלטרנטיבה טובה יותר, ובכלל זה גם לא האלטרנטיבה m(i) ומתוך [2] : $\forall i \in I: V(i,\sigma(i)) - P_{\sigma(i)} \geq V(i,\mu(i)) - P_{\mu(i)}$

נסכום את כל האי שיוויונים (מ i=1 ועד i=N):

$$[8]\ \sum_i V(i,\sigma(i)) - \sum_i P_{\sigma(i)} \geq \sum_i V(i,\mu(i)) - \sum_i P_{\mu(i)}$$

אבל בכל הקצאה אפשרית שהיא : $\sum_i P_{\sigma(i)} = \sum_i P_{\mu(i)} = \sum_j P_j$

ולכן נוכל לכתוב את [8] בצורה הבאה : $\sum_i \left[V(i,\mu(i)) - V(i,\sigma(i))\right] \leq 0$ [9]

מתוך בחירת m(i) קיים [7] : $\exists i_0:\ V(i_0,\mu(i_0)) - V(i_0,\sigma(i_0)) > 0$

אבל סכום כל המחוברים ב [9] אינו חיובי ויש בהם אחד לפחות חיובי ממש (מ [7] לעיל) מכאן שיש בהם גם אחד שלילי ממש (כלומר, פרט שעבורו m(i) גרועה ממש מ s(i)). או :

$$\exists i_1:\ V(i_1,\mu(i_1)) - V(i_1,\sigma(i_1)) < 0$$

וזה סותר את [6] ולכן אין חלוקה m(i) כנדרש. מכאן ש s(i) יעילה.

<u>1997/8 ב</u>

<u>שאלה 2</u>

1. שני המוצרים x ו y הם כאלו שנצרכים בזוגות (x ו y) ולצרכן אין כלל תועלת מלצרוך אחד מהם בנפרד (דוגמה לא מדוייקת אבל מתקרבת לרעיון : זוגות נעליים ימין ושמאל, דוגמה יותר מדוייקת : דבק או צבע שצריך לערבב שני חומרים כדי לקבל אותו).

2. אם כמויות המוצרים בשוק אינן שוות אז מחיר המוצר ממנו הכמות גדולה יותר חייב להיות אפס. אם המחירים של שני המוצרים חיוביים ממש אזי כל צרכן ממכסם תועלתו ירכוש כמות זהה משני המוצרים 1 ו - 2, לכן גם הביקוש המצרפי לשני המוצרים יהיה שווה, ולכן השוק לא יוכל להתנקות. אי לכך, אחד המחירים חייב להיות אפס ממש (אם שניהם יהיו אפס הביקוש למוצרים אלו יהיה אינסופי). אבל אם לאחד משני המוצרים המחיר הוא אפס, חרי שבשל תכונות פונקצית התועלת הביקוש לו יהיה לפחות כמו הביקוש למוצר השני (הנרכש בכסף מלא), לכן מחיר המוצר הנתון בתוסר יחסי לא יוכל להיות אפס שכן אז הביקוש לו יהיה לפחות כמו כמות המוצר שאינו בחוסר ולכן השוק למוצר החסר לא יוכל להתנקות.

3. בשוק החדש יהיה שווי משקל תחרותי בו המחיר לצמד המוצרים (x–y) יהיה 7 (סכום המחירים של המוצרים בשווי משקל בשוק המקורי) וכל צרכן יצרוך בדיוק את הכמות שהיה צורך בשווי משקל בשוק המקורי. אם נגדיר את המוצר החדש (צרוף יחידת x ויחידת y) להיות w אז התועלת "החדשה" של הפרט נתונה על ידי $\tilde{U}(w,z) - U(w,w,z)$ ומכיוון שלכל פרט כמות שווה של x ושל y הרי שבעית המכסימיזציה של כל הפרטים תחת המחיר 7 לצמד זהה לזו שבשוק המקורי. לכן מחירי שווי משקל הקודמים מגדירים פתרון תחרותי גם למצב החדש (השווקים יתנקו כאשר כל פרט ממכסם תועלתו עפ"י מחירים אלו).
הערה : אם המחירים בשווי משקל היו שניהם חיוביים הרי שבהכרח הכמויות בשוק משני המוצרים שוות (עפ"י סעיף 2).

1998/9 א

4. נסמן את שני המוצרים להיות :

מוצר 1 : רווח של $1 אם א זוכה; מוצר 2 : רווח של $1 אם ב זוכה

הסלים ההתחלתיים של שני המתאגרפים הינם $e^1(M,0),e^2(0,M)$ (M הוא גובה הפרס בתחרות מליון דולר)

שווי משקל הינו וקטור מחירים p והקצאות x^1,x^2 כך שהשווקים מתנקים כאשר כל האחד מהפרטים בוחר את צריכתו באופן אופטימלי בהינתן המחירים וסלו ההתחלתי.

שני הפרטים מקיימים הנחות vNM, הם שונאי סיכון ממש, ויש להם אותו יחס העדפה על עולם ההגרלות. מכאן שיש U() עולה וקעורה ממש (המשותפת לשני הפרטים) כך שכל אחד מהם מביא למקסימום את תוחלת U.

הבעיה של פרט 1 בהינתן המחירים היא אם כן : $\max_{x_1^1,x_2^1} \quad qU(x_1^1)+(1-q)U(x_2^1)$ [1]

וזאת תחת האילוץ $p_1x_1^1+p_2x_2^1 \le p_1M$ (שמתקיים למעשה כשיוויון)

מכיוון ש U קעורה ממש יש ל [1] מכסימום יחיד ומתוך מתוך תנאי סדר ראשון למכסימום נקבל את שיעור התחלופה הסובייקטיבי של פרט 1 בין שני המוצרים והוא : $\frac{p_1}{p_2}=\frac{U'(x_1^1)}{U'(x_2^1)}\cdot\frac{q}{1-q}$

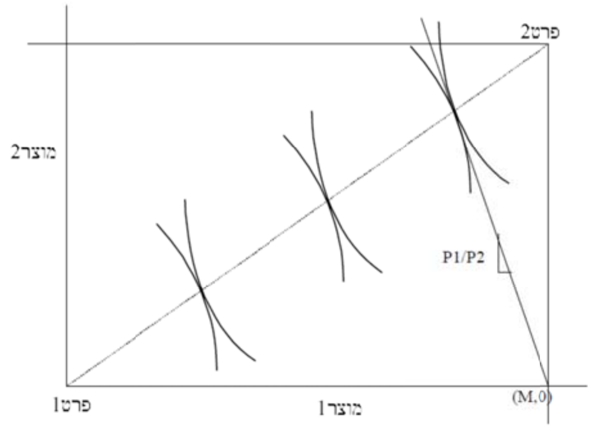
באופן דומה שיעור התחלופה הסובייקטיבי של פרט 2 הינו : $\frac{p_1}{p_2}=\frac{U'(x_1^2)}{U'(x_2^2)}\cdot\frac{q}{1-q}$

נשים לב כי לאורך כל הנקודות על האלכסון הראשי (צריכת כל פרט משני המוצרים זהה) שיעור התחלופה הסובייקטיבי של שני הפרטים שווה והוא q/(1-q). הואיל והפרטים שונאי סיכון ממש, בכל מקרה בו הצריכה מהמוצר הראשון קטנה יותר אזי שיעור התחלופה הסובייקטיבי גבוה יותר ולהפך. מכיוון שבשווי משקל חייב להתקיים שלשני הפרטים אותו שיעור תחלופה (והוא זהה גם ליחס המחירים), וכמו כן הכמות הכללית של שני המוצרים בשוק שווה הרי שלא יכול להיות שאחד הפרטים צורך ממוצר 1 יותר מאשר צורך ממוצר 2, לכן בשווי משקל בהכרח $x_1^1=x_2^1$ וכמובן גם $x_1^2=x_2^2$.

מכאן שיחס התחלופה הסובייקטיבי של שני הפרטים בשווי משקל הינו q/(1-q)>1 וזהו גם יחס המחירים שם. מכיוון שהסל ההתחלתי של פרט 1 מורכב כולו ממוצר 1 (ובאופן סימטרי לגבי 2) הרי שהצריכה של פרט 1 בשווי משקל (משני המוצרים) גדולה ממש מזו של פרט 2. וביתר פרוט : צרוף נכיון השווקים ומגבלות שני הפרטים ייתן : צריכת פרט 1 - $x_1^1=x_2^1=qM$, וצריכת פרט 2 - $x_1^2=x_2^2=(1-q)M$.

אם כן קיבלנו : בשווי משקל כל פרט מחזיק בידו כמות שווה משני המוצרים (ולכן התועלת שלו לא תלוייה כלל בתוצאות הקרב). בשווי משקל הפרט בעל הסכוי הגדול יותר לזכות בקרב מחזיק יותר מוצרים מכל סוג.

לצורך הבנת ההסבר ניתן להעזר בתרשים תיבת Edgeworth הבא (הסל ההתחלתי נמצא בפינה מימין למטה).



1998/9 ב

3. א. שווי משקל תחרותי הוא מחירים p והקצאות x כך שמתקיים :
(i) כל פרט בוחר את סל הצריכה שיביא את תועלתו למכסימום בהינתן מגבלת התקציב שלו, המחירים וצריכת הפרטים האחרים.
(ii) השווקים מתנכים.

ב. מכיוון שכל פרט לוקח את צריכת כל הפרטים האחרים כנתונה הרי שקבוצת שווי המשקל האפשריים זהה לזו המתקבלת אילו כל הפרטים היו "אנוכיים". ביתר פרוט : צרכן מטיפוס א מבצע מכסימיזציה של $v(x_1)+v(x_2)$, כאשר x_1 הוא סל תחת מגבלת התקציב שלו ואילו x_2 הוא הסל הממוצע שצורכים פרטים מסוג ב'. ברם, פרט מטיפוס א לוקח כנתון את x_2 ולכן המכסימום יתקבל עבור אותו סל x_1 שהיה מתקבל בבעיה של טיפוס א' "אנוכי" $\max v(x_1)$. מכיוון שלכל וקטור מחירים פתרון בעית הצרכן זהה הרי שגם קבוצת שווי המשקל זהה (מחירים והקצאות).

ג. חלוקה יעילה היא הקצאה x כך שלא ניתן לשפר ממש את מצבו של אחד הפרטים מבלי להרע את מצבו של לפחות פרט אחד. לצורך הדגמה נגביל את עצמנו למקרה של שני פרטים בלבד : הקצאה בה לפרט א' סל x_1 ולפרט ב' סל x_2 היא יעילה אם ורק אם לא ניתן למצוא הקצאה אחרת x_1',x_2' שמקיימת :

(i) ההקצאה אפשרית $x_1'+x_2'=(1,1)$

(ii) מצבם של שני הפרטים לא מורע : $v(x_1')+v(x_2')\geq v(x_1)+v(x_2)$ (פרט א')
וכן $v(x_2')\geq v(x_2)$ (פרט ב')

(iii) מצבו של לפחות אחד הפרטים משתפר ממש : לפחות אחד האי שיוויונים ב(ii) מתקיים כאי שיוויון חזק

ד. שווי משקל תחרותי בשוק זה איננו בהכרח יעיל. לצורך כך מספיק להביא דוגמה נגדית : נסתכל במקרה בו פונקצית התועלת היא $v(x,y)=xy$. במקרה כזה קיים שווי משקל תחרותי יחיד (עד כדי המחירים) ובו המחיר היחסי הוא 1, וההקצאה היא כזו שכל פרט צורך 0.5 מכל מוצר. בשווי משקל זה תועלת פרט מטיפוס א' הינה 0.5, ותועלת פרט מטיפוס ב' היא 0.25. אבל ניתן לשפר ממש את תועלת כל הפרטים ע"י מעבר להקצאה (היעילה) הבאה : כל פרט מטיפוס א' יקבל סל (0,0) וכל פרט מטיפוס ב' יקבל סל (1,1). במקרה זה תועלת כל הפרטים תגדל ל 1.

1999/2000

שאלה 2

א. הגדרה אפשרית (ניתן להגדיר הגדרות אחרות המבוססות על אותו רעיון):
נאמר ש 1 אוהב אחידות יותר מ2 אם לכל צמד סלים (x,y) ו (z,z) קיים : $(x,y)\succeq_1(z,z) \Rightarrow (x,y)\succeq_2(z,z)$ (כלומר, אם פרט 1 מעדיף סל כלשהו על צריכה קבועה אזי גם לפרט 2 חייבת להיות אותה העדפה)

ב. היחס שהוא יותר אוהב אחידות מכל יחס אחר הינו min(x,y)
הואיל ו $\min(x,y)\geq(z,z)$ גורר $x\geq z$ וגם $y\geq z$ אז כל יחס מונוטוני (בו המוצרים רצויים) יקיים $(x,y)\succeq(x,z)\succeq(z,z)$

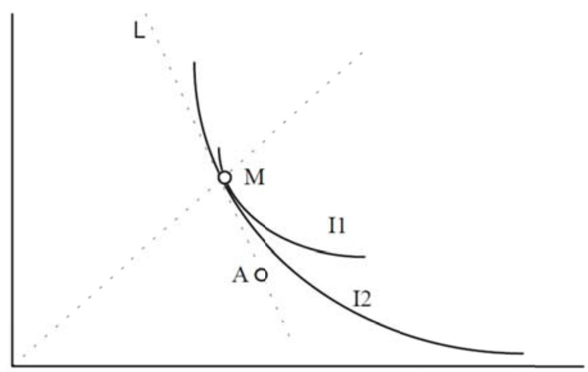
ג. נניח כי צרכן 2 צורך בשווי משקל סל אחיד (z,z) . לשני הסוחרים אותו סל התחלתי ולכן בהינתן מחירים כלשהם יש להם אותה מגבלת תקציב. הואיל ופרט 2 צורך בשווי משקל את הסל (z,z) הרי שהוא מעדיף סל זה על פני כל סל אפשרי אחד בהינתן מחירי שווי משקל, אבל פרט 1 יותר אוהב אחידות מפרט 2 ולכן אם פרט 2 מעדיף סל אחיד הרי בוודאי שפרט 1 מעדיף גם הוא את הסל (z,z). ברם, הכמויות ההתחלתיות משני המוצרים שונות ולכן השווקים לא יוכלו להתנקות אם שני הפרטים מבקשים לצרוך סל אחיד. אי לכך פרט 2 לא יוכל לצרוך בשווי משקל סל אחיד.

ד. אם ההעדפה של פרט 1 דיפרנציאבילית (ואם העדפת 2 קמורה ממש ורציפה) הרי שפרט 1 לא יוכל לצרוך בשווי משקל סל אחיד (z,z). כדי לראות זאת נתבונן בתרשים הבא. צירי התרשים הם הצריכה ממוצרים 1 ו 2. נניח כי בשווי משקל פרט 1 צורך סל אחיד ונסמן סל זה ב M. עפ"י ההנחה כי העדפות 1 דיפרנציאבליות ומכיון ש M הוא הסל הנבחר ע"י פרט 1 הרי שעקומת האדישות של פרט 1 (המסומנת ב I1) דרך M חייבת להשיק למגבלת התקציב בהינתן מחירי שווי משקל ונסמן מגבלה זו בישר L.

הואיל ופרט 1 יותר אוהב אחידות מ 2 הרי שעקומת האדישות של 2 דרך כל נקודה על האלכסון הראשי (ובפרט דרך M) חייבת לעבור תמיד מתחת לעקומת האדישות של פרט 1 העוברת דרך אותה נקודה. היות שבמודל הצרכן הקלאסי ההעדפות קמורות הרי שעקומת האדישות של 2 דרך M חייבת להשיק גם היא לישר L מלמעלה.

אבל לפרט 2 ולפרט 1 אותה מגבלת תקציב ובשל קמירות ההעדפות של פרט 2 הרי שעקומת האדישות של 2 (I2) חייבת לעבור מעל למגבלת התקציב L ובפרט מעל הנקודה ההתחלתית A. בגלל הקמירות החזקה והרציפות של העדפות 2 העקומה I2 עוברת ממש מעל הנקודה A.

כלומר, גם פרט 2 מעדיף את M על פני A. אבל אם שני הפרטים מעדיפים את M הרי שהשווקים לא יוכלו להתנקות. קבלנו סתירה להנחה כי פרט 1 צורך בשווי משקל סל אחיד.



אם ההעדפה של פרט 1 איננה דיפרנציאבלית בנקודה M <u>ייתכן</u> (לא בהכרח) כי בשווי משקל פרט 1 צורך סל אחיד. דוגמה : העדפת 1 נתונה ע"י u1(x,y)=min(x,y) העדפת 2 נתונה ע"י u2(x,y)=xy. במקרה זה המחיר היחסי של מוצר 2 בשווי משקל הוא 0 והקצאות שווי משקל הן (1,1) לצרכן 1 ו (3,1) לצרכן 2.

2003/4

תשובה 1.

א. שיווי משקל היא נקודה בקטע [0,1] , שכאשר הנופש נמצא בה, הוא מעדיף אותה לפחות כמו כל נקודה אחרת בקטע. באופן פורמלי, $a*$ הוא שיווי משקל אם $u(a^*,a^*) \geq u(x,a^*)$ לכל $x \in [0,1]$.

ב. כאשר $u(x,a)=1-|x-a|$, נקבל שלכל $x \neq a$, $x \in [0,1]$ מתקיים $u(a,a)>u(x,a)$, ומכאן כל נקודה היא שיווי משקל. פונקציית זו מבטאת העדפות של פרט, שבכל נקודה בה הוא נמצא, מעדיף ממש נקודה זו על פני כל נקודה אחרת.

ג. נופש שהעדפותיו ניתנות לייצוג על ידי $U(x,a) = | a - x |$. משמעות העדפות אלה שמקבל ההחלטות מעדיף תמיד להיות רחוק ככל האפשר ממקומו הנוכחי ולכן כמובן שאין ש״מ. ההעדפות אינן קמורות. בהינתן $x=1/2$ למשל, ההעדפה אינה קמורה שכן 0.8 עדיפה על 0.3 אבל 0.4 הנמצאת ביניהם אינה עדיפה על 0.3.

ד. משפט: יש ש״מ.
הוכחה:
מתכונת הקמירות החזקה של יחס ההעדפה לכל x, יש נקודה אופטימלית יחידה. ניתן לכן להגדיר את הפונקצייה $f(x)$ כך: $f(a) = \underset{x}{ARGMAX} \quad u(x,a)$. f פונקציה מהקטע $[0,1]$ לעצמו. נקודת שבת של f היא שיווי משקל. די להראות ש f רציפה שכן אז מתקיימים תנאי משפט Brower ולפיכך **יש** $a \in [0,1]$ המקיים $a = f(a)$.

טענה: $f(a)$ רציפה.
נניח שלא, כלומר קיימות $x_n -> x*$ ו $a_n -> a*$ עבורן, $x_n = f(a_n)$ לכל , n, אך $x* \neq f(a*)$. מרציפות u נובע: $\lim \quad u(x_n,a_n) = u(x*,a*)$, מכך ש- $x* \neq f(a*)$ נובע שקיים $z \neq x*$, $z \in [0,1]$, המקיים $u(z,a^*) > u(x*,a*)$. מכאן, קיים N כך שלכל $n > N$ מתקיים $u(z,a_n) > u(x_n,a_n)$, בסתירה לכך ש- $x_n = f(a_n)$.

תשובה 2

א. בש״מ תקבע כמות הכרטיסים הנמכרת (מחיר הכרטיסים קבוע). ההעדפות זהות לכל הפרטים.

נסמן:
q את הסיכוי לזכות במכונית
Q כמות המשתתפים בהגרלה.
נסמן ב- L(q) את ההגרלה שבה מתקבל הפרס ״WIN״ בסיכוי q ו "LOSS״ בהסתברות 1-q.

מועמד לשווי משקל יהיה (q,Q) כך ש-:

1) בהינתן q, הפעולות של הפרטים שרוכשים את הכרטיס ואילו שאינם רוכשים את הכרטיס הן אופטימליות.

דהיינו אם - $Q<N$ 0 לפחות טוב כמו $L(q)$

ואם $Q>0$ $L(q)$ לפחות טוב כמו 0

המשמעות היא שפתרון פנימי של שיווי משקל תחרותי קיים כאשר כל פרט **אדיש** בין רכישה לאי רכישה של ההגרלה. פתרון קצה אפשרי כאשר כל הפרטים קונים את כרטיס ההגרלה.

2) $q=1/Q$ כאשר $Q>0$.

$Q=0$ ← הסיכוי לא מוגדר (האופטימיזציה של הפרט לא מוגדרת, לא ש״מ).

תנאי זה מבטיח שבכמות המתקבלת בש״מ, q היא אכן הסתברות האמיתית לזכות בפרס.

ב.

עבור $N= 10{,}000$ ומספרי vNM $v(\text{LOSS})=0$, $v(0)=1$, $v(\text{WIN})=10$ נקבל:

- $v(\text{WIN})>v(0)$, ולכן $Q>0$.
- $Q=10000$ אינו ש״מ שכן, עבור כמות זו של רוכשים $q=1/10000$, ולכן $qv(\text{WIN})=1/1000< v(0)=1$ (כלומר אם כל הפרטים רוכשים אז לכל פרט עדיף שלא לרכוש).

ולכן נדרוש

$$qv(WIN)+(1-q)v(LOSS)=v(0)$$

$$q\times 10+(1-q)\times 0=1 \leftarrow q=1/10 \leftarrow Q=10.$$

ג. טענה: כמות הרוכשים, בשיווי משקל, יורדת עם העלייה בשנאת הסיכון.

נגדיר יחס העדפה 1 כיותר שונא סיכון מיחס העדפה 2. נניח בשלילה שקיימים שיווי משקל מתאימים בהם מתקיים $Q_1>Q_2$, כלומר שבש״מ בו לפרטים יחס העדפה 1 (יותר שונא סיכון) יותר פרטים קונים כרטיס הגרלה מאשר בש״מ בו לפרטים יחס העדפה 2.

$0\succeq_2 L(q_2)$

הסבר: Q_2ש״מ, וגם $Q_2<N$ ← $Q_1>Q_2$

$L(q_2)\succ_2 L(q_1)$

הסבר: $Q_1 > Q_2$ גורר $q_1<q_2$ ולכן כל פרט המעדיף את הפרס WIN על LOSS, ומקיים את אקסיומת אי התלות, מעדיף$L(q_2)$ על $L(q_1)$.

$0\succ_2 L(q_1)$ טרנזיטיביות

$0\succ_1 L(q_1)$

הסבר: מכיוון שפרט עם העדפות 2 מעדיף את הפרס הוודאי 0 על $L(q_1)$ אז ודאי שפרט עם העדפות 1 (יותר שונא סיכון) מעדיף את הפרס הוודאי 0 על פני $L(q_1)$.

ומכאן שמההנחה ש- $Q_1>Q_2$ נובע ש- $Q_1=0$ (שכן בש"מ כל הפרטים נוקטים בפעולה האופטימלית), כלומר סתירה.

2004/5

.2

א. במידה ולכל הפרטים אותו יחס העדפה על קבוצת הבתים, בכל חלוקה דטרמיניסטית קיים פרט אשר יקבל את הבית הגרוע ביותר עבורו בהסתברות 1. עבור פרט זה החלוקה זהה לתור בו הוא אחרון בהסתברות 1, לכן פרט זה לא יעדיף את החלוקה הדטרמיניסטית על פני התור הרנדומי.[1]

ב. נסמן את קבוצת הבתים ב- $\{i,j,k\}$ ואת קבוצת הפרטים ב- $\{a,b,c\}$. נניח, $a \succ_i b \succ_i c$, $b \succ_j c \succ_j a$ ו- $b \succ_k a \sim_k c$. קל לראות שהפרטים יעדיפו את החלוקה הוודאית $(x_i, x_j, x_k) = (a,b,c)$ על פני הפרוצדורה הרנדומית.

ג. שיווי משקל תחרותי הוא וקטור של מחירים והקצאות (כל הקצאה כוללת כסף ומיקום בתור) כך שעבור כל פרט הסל המתקבל הוא אופטימאלי בהינתן קבוצת הבחירה העומדת בפניו (קבוצת המיקומים בתור), וקטור המחירים, והקצאתו הראשונית ובנוסף כל מיקום בתור נרכש על ידי פרט אחד בלבד.

ד. המיקום בתור מאפשר לבחור את הבית העדיף ביותר מקבוצת הבתים שלא נבחרו על ידי פרטים שמיקומם בתור גבוה יותר. נניח שאינדקס הבתים מקיים לכל j, k, $v(k) \geq v(j)$ אם ורק אם $k > j$. היות ולפרטים אותה פונקצית תועלת (מכל הקצאה של בתים וכסף), מיקום בתור קובע חד-חד-ערכית את התועלת הנובעת מהבית שיתקבל.

אם קיימים j, j' כך ש- $v_j - v_{j'} < p_j - p_{j'}$, לא יהיה אף פרט שיסכים לרכוש את המיקום j שכן הוא יעדיף ממש לרכוש את המיקום j' (במקרה זה, אף פרט לא ירכוש את המיקום ה- j בסתירה לדרישות ש"מ). לפיכך בש"מ בין כל זוג מחירים מתקיים $v_j - v_{j'} = p_j - p_{j'}$. בנוסף, לא יתכן שפרט כלשהו יסכים לרכוש מיקום במחיר העולה על תועלתו האבסולוטית מהמיקום, כלומר $p_j \leq v_j$ (אחרת, לפי פונקצית התועלת, הוא יעדיף שלא לקנות את המקום בתור, כלומר לא יהיה ביקוש לבית זה). מחירי ש"מ הם לפיכך מהצורה $p_j = v_j - C$ כאשר C קבוע חיובי המקיים $C \leq Min\{v(j)\}$.

---

[1] **לחלק שהומלץ למחשבה בבית:** כל הפרטים מקיימים את הנחות VNM, ויש להם את אותן ההעדפות ביחס לקבוצת הבתים ולהגרלות על קבוצת הבתים. לפיכך, קיימת פונקצית תועלת v על קבוצת הבתים, כך שפרט i מעדיף פרוצדורה (הגרלה) p על הגרלה q אם ורק אם $U_i(p) = \sum_{z \in Z} p_i(z)v(z) > \sum_{z \in Z} q_i(z)v(z) = U_i(q)$ כאשר Z מסמן את קבוצת הבתים, $p_i(z)$ ו- $q_i(z)$ מסמנים את הסיכוי שפרט i יקבל את הבית z בפרוצדורות p ו- q, בהתאמה.
ניתן לסכום את סך התועלות שפרוצדורה כלשהי (המחלקת את כל הבתים לכל הפרטים) מניבה לפרטים: $\sum_{i=1}^{N} U_i(p) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{z \in Z} p_i(z)v(z) = \sum_{z \in Z} v(z)$ שכן, כל בית מוגרל בוודאות לפרט מסוים, וכל פרט מקבל בוודאות בית אחד. בכדי שהפרטים יסכימו שיש פרוצדורה עדיפה על המוצעת , נדרוש שלכל הפחות, פרט אחד יעדיף ממש את הפרוצדורה האחרת ובנוסף, שאף פרט אחר לא ימצא את אותה פרוצדורה נחותה ממש מבחינתו.
אבל,סכום תועלות הפרטים , $\sum_{i=1}^{N} U_i(p) = \sum_{z \in Z} v(z)$, קבוע לכל הפרוצדורות! ולפיכך, אם פרט אחד מעדיף ממש פרוצדורה אחרת קיים פרט אחר שעבורו הפרוצדורה האחרת נחותה ממש.

Question 3

Note that in any equilibrium since the payoff function is linear t_i satisfies for all i:

$$(*) \quad t_i = \begin{cases} 0 & if\ v_i < V \\ [0,1] & if\ v_i = V \\ 1 & v_i > V \end{cases}$$

Since v_i is monotonically increasing, it follows that if $t_i > 0$ then then $t_j = 1$ for all $j > i$ and $t_j = 0$ for all $j < i$.

(a)

- For the case where $N = 10$ and $v_i = i$ the following is an equilibrium: $t_i = 0$ for $i < 5$, $t_i = 1$ for $i \geq 5$ and $V = \sum_{i=5}^{10} \frac{v_i}{10} = 4.5$. This is an equilibrium. According to $(*)$ t_i optimal for all i and $V = \sum_{i=1}^{N} \frac{t_i v_i}{N}$.

- For the case where $N = 3$ and $v_1 = 1$, $v_2 = 2$ and $v_3 = 5$ the following is an equilibrium: $t_1 = 0$, $t_2 = 0.5$, $t_3 = 1$ $V = \frac{0.5v_2+v_3}{3} = 2$. Again, according to $(*)$ t_i optimal for all i and $V = \sum_{i=1}^{N} \frac{t_i v_i}{N}$.

For both cases the equilibrium is unique, since for every $V' > V$, $\sum_{i=1}^{N} \frac{t_i' v_i}{N} \leq \sum_{i=1}^{N} \frac{t_i v_i}{N}$ implying that $V' \neq \sum_{i=1}^{N} \frac{t_i v_i}{N}$ (likewise for $V' < V$).

(b) Proof of existence of an equilibrium in the general case:

Let $N = 1$, then $t_1 = 1$ and $V = v_1$ is an equilibrium.

Let $N > 1$. Define $g(i) = \sum_{j=i}^{N} \frac{v_j}{N}$ and $v(i) = v_i$ for $i = 1, ..., N$. ($g(i)$ is the average product per person when only $j \geq i$ work). Notice that $g(i)$ is strictly decreasing and $v(i)$ is strictly increasing in i, furthermore $g(1) > v(1)$ and $g(N) > v(N)$. So there must exist an i^* such that $g(i^*+1) \leq v(i^*+1)$ and $g(i^*) > v(i^*)$. There are two possible cases: $g(i^*) > g(i^*+1) \geq v(i^*)$ and $g(i^*) > v(i^*) > g(i^*+1)$.

- For $g(i^*) > g(i^*+1) \geq v(i^*)$: let $V = \sum_{j=i^*+1}^{N} \frac{v_j}{N} = g(i^*+1)$, $t_j = 1$ for all $j \geq i^*+1$ and $t_j = 0$ for all $j < i^*+1$. This is an equilibrium since for all $j \geq i^*+1$ $V = g(i^*+1) \leq v(i^*+1) \leq v(j)$ thus $t_j = 1$ is optimal and for all $j < i^*+1$ $g(i^*+1) \geq v(i^*) \geq v(j)$ thus $t_j = 0$ is optimal. Finally $V = \sum_{j=i^*+1}^{N} \frac{v_j}{N} = \sum_{i=1}^{N} \frac{t_i v_i}{N}$.

- For $g(i^*) > v(i^*) > g(i^*+1)$: In this case i^* separates the market into those who do not work ($j < i^*$) and the rest who work by choosing t^* such that $\sum_{j=i^*+1}^{N} \frac{v_j}{N} + \frac{t^* v_{i^*}}{N} = v_{i^*}$. Let $V = \sum_{j=i^*+1}^{N} \frac{v_j}{N} + \frac{t^* v_{i^*}}{N} = v_{i^*}$, $t_j = 1$ for all $j \geq i^*+1$, $t_{i^*} = t^*$ and $t_j = 0$ for all $j < i^*$.This is an equilibrium since for all $j \geq i^*+1$, $V = v_{i^*} < v_j$ thus $t_j = 1$ is optimal, for $j = i^*$ $V = v_{i^*}$ thus $t_{i^*} = t^*$ and for all $j < i^*$ $V = v_{i^*} > v_j$ thus $t_j = 0$ is optimal. Finally, $V = \sum_{j=i^*+1}^{N} \frac{v_j}{N} + \frac{t^* v_{i^*}}{N} = \sum_{i=1}^{N} \frac{t_i v_i}{N}$.

2008/9

שאלה 2

a. Show a necessary condition for the existence of a market equilibrium and explain why such an equilibrium usually does not exist.

Solution:

In equilibrium, each man chooses the woman he prefers the most from those whose value is not greater than his own. This implies that in any match, the woman's value is smaller or equal to the man's. Similarly, since each woman chooses the man she prefers the most from those whose value is not greater than her own, in any match the man's value is smaller or equal to the woman's. Therefore, the values of the man and the woman are the same in every match.

Focus on the couple with the highest value (if there is more than one, choose one of them). The man in this couple has a value which is equal to that of the woman with the highest value and therefore the man's value is equal to, or higher than, the value of all the women in the set. This man could have chosen any partner. Therefore, since he chose this specific woman, one can conclude that she is the first one in his ordering. Similarly, the man in this couple is the first in the woman's ordering.

Hence, if an equilibrium exists, then there is at least one couple in which each person prefers his partner to any other. Since such a couple does not necessarily exist, there is usually no such equilibrium.

Assume that because of this market failure, we allow the use of force. The stronger sex (assume the men, just for simplicity) is ordered in a "strength" relation. A Strength Equilibrium is a matching between the men and the women such that there are no two couples, M_1 matched to F_1, and M_2 matched to F_2, such that:

1. M_1 is stronger than M_2.
2. M_1 prefers F_2 to F_1.
3. F_2 prefers M_1 to M_2

b. Explain why for each preference profile there exists a Strength Equilibrium.

Solution:

We will use the algorithm for a Jungle Equilibrium presented in class. Order the men from strongest to weakest. In turn, each man chooses his preferred woman from those who haven't been chosen yet. Clearly, there's no M_1 stronger than M_2 who prefers F_2 to F_1 (since M_1 chose F_1 even though he could have chosen F_2).

Therefore, conditions 1 and 2 cannot hold simultaneously and therefore this is a Strength Equilibrium.

c. Show that there is a preference profile for which at least two strength equilibria exist.

Solution:

Assume that all the women have the same preference relation: the weaker the better. In this case, any matching is a strength equilibrium since conditions 1 and 3 never hold for the same couple: if a man, M_1, prefers a woman, F_2, who is matched to a man weaker than him, M_2, then this woman will not prefer him to the man she is already matched to.

2010/1

שאלה 3

a. Define an appropriate equilibrium concept for this economy. Demonstrate this equilibrium in an Edgeworth box (that is, in an economy with two agents).

Solution:

Let e be the initial allocation - e^i is the bundle held by agent i. For some agents $e^i = (e_1^i, 0)$ and for the others $e^i = (0, e_2^i)$.

Let $\succ^i$ denote agent $i's$ preferences.

An equilibrium is a pair $((a^i),(p_k))$ where:

a is a pair of bundles - agent $i's$ bundle is $a^i = (a_1^i, a_2^i)$.

$p = (p_1, p_2)$ is the price vector of the two commodities.

such that:

1. a is feasible: $\sum a^i = \sum e^i$.

2. If $e^i = (e_1^i, 0)$ then $a_1^i = \min x_1$ s.t.$(x_1,x_2) \succeq^i e^i$ and $p \cdot e^i \geq p \cdot (x_1,x_2)$.

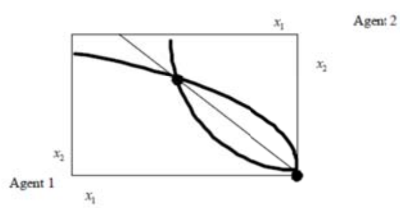
If $e^i = (0, e_2^i)$ then $a_2^i = \min x_2$ s.t.$(x_1,x_2) \succeq^i e^i$ and $p \cdot e^i \geq p \cdot (x_1,x_2)$.

b. Show (graphically) that in a world with two agents, who initially hold two different commodities, such an equilibrium always exists.

Solution:

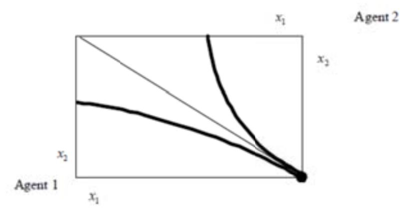
Assume WOLG that agent 1 holds only commodity 1 and agent 2 holds only commodity 2. Consider the following 3 cases:

1. The indifference curves through the initial bundle cross again in the box. In this case, the equilibrium allocation is the second crossing, and the price vector is such that the budget line passes through the two crossing points.



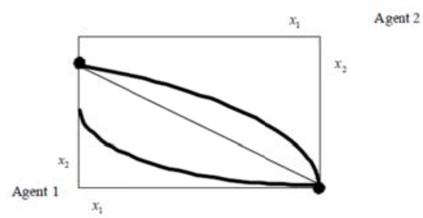
2. The indifference curves through the initial bundle do not cross again in the box and at the initial bundle the slope of agent 1 curve is higher than agent 2's.

Any prices such that the budget line does not cross the curves is an equilibrium, and the final allocation is identical to the initial one.

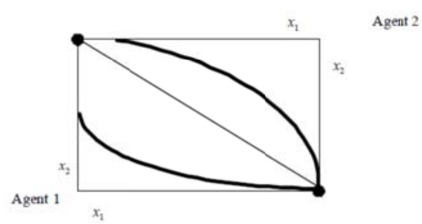


3. The indifference curves through the initial bundle do not cross again in the box,.and at the initial bundle the slope of agent 1 curve is lower than agent 2's.

If agent 2's (1's) curve crosses commodity 1 (2) axis, the equilibrium allocation is this crossing. The prices are set such that the budget line connects the initial and final allocations.



Otherwise, it is the bundle opposite to the initial one. The prices are set such that the budget line connects the initial and final allocations.



Problem 2.

1) (Just a warm-up) Give an example within the model of an "economy with houses" where the agents have strict preferences and there is a Pareto inefficient allocation for which there is no possibility for a pair of agents to conduct a mutually beneficial trade.

Answer:

Consider the model with three houses $\{x_1, x_2, x_3\}$ and three agents with the preference relations: $x_1 \succ_1 x_2 \succ_1 x_3$, $x_2 \succ_2 x_3 \succ_2 x_1$ and $x_3 \succ_3 x_1 \succ_3 x_2$. The allocation $a(i) = x_{i+1}$ is not Pareto effiicient but there is no pair of agents who can conduct a mutually beneficial trade.

2) (The main part of the question): Show that such an example is impossible in the houses economy if houses are ordered on a line and all preferences are single-peaked.

Answer:

Let $(\succ_i)_{i=1,\ldots,N}$ be a profile of single peaked preferences, and assume that the allocation $a(i)$ is inefficient. We need to show that there is at least one pair of agents that can benefit from exchanging the houses between themselves.

Without loss of generality, assume the houses are ordered such that $a(i) < a(i+1)$ for all i. Let $b(i)$ be a Pareto improvement allocation.

Let k be the first agent that obtains a lower house in the Pareto improvement. That is, the lowest i such that $b(i) < a(i)$. Clearly, $k > 1$.

Consider the agents lower than k who change house in the Pareto omprovment (there must be such). All of them must move "up". Let l be the highest agent from among those. Clearly, $b(l) \geq a(k)$ and $a(l) \geq b(k)$. Thus, by the single peakness $a(l) \succ_k a(k)$ and $a(k) \succ_l a(l)$ and k and l have a mutually beneficial trade.

Problem 3

Consider the housing model we talked about in class (where the number of houses is equal to the number of individuals).

a. We will say that an allocation $a = (a(i))_{i \in I}$ is an equilibrium if there are "choice sets" $(S(i))_{i \in I}$ such that:

(i) $a(i)$ is the i-best in $S(i)$

(ii) for any two agents i and j either $S(i) \subset S(j)$ or $S(j) \subset S(i)$.

Show that a is an equilibrium if and only if a is Pareto efficient.

Answer:

$\rightarrow$

Let a be an equilibrium according to the above definition. By (ii), we can order the agents such that $S(1) \subset S(2) \subset \ldots \subset S(n)$.

Consider a feasible allocation b such that $b(i) \succsim_i a(i)$ for all $i \in I$ for at least one agent j, such that $b(j) \succ_j a(j)$.

Let i^* be the highest $i \in I$ such that $b(i) \neq a(i)$. It must be that $b(i^*) \succ_{i^*} a(i^*)$ and that $b(i^*) = a(j)$ for some $j < i^*$. However, $a(j) \in S(j) \subset S(i^*)$, which contradicts $a(i^*)$ being the i-best in $S(i^*)$.

$\leftarrow$

Let a be a Pareto-efficient allocation. Construct the sets $S(i)$ by the following steps:

Step 1:

There is at least one agent such that $a(i) \succ_i a(j)$ for all $j \neq i$: otherwise we obtain a contradiction to a being efficient (see problem 1 in $B-1$).

Denote this agent by 1.

Define $S(1) = \bigcup_{j \in I} a(j)$. Clearly, $a(1)$ is the 1-best in $S(1)$

Repeat this procedure with the remaining agents:

At step l, there is at least one agent in $I \setminus \{1, \ldots, l-1\}$ such that $a(i) \succ_i a(j)$ for all $j \in I \setminus \{1, \ldots, l-1, i\}$.

Denote this agent by l.

Define $S(l) = \bigcup_{j \in I \setminus \{1,\ldots,l-1\}} a(j)$. Clearly, $a(l)$ is the l-best in $S(l)$

Lastly, note that by construction, for any two agents i and j, either $S(i) \subset S(j)$ or $S(j) \subset S(i)$.

b. We will say that an allocation $a = (a(i))_{i \in I}$ is a 2-equilibrium if there are "choice sets" $(S(i))_{i \in I}$ such that

(i) $a(i)$ is the i-best in $S(i)$; and

(ii) $S(i)$ contains two elements.

Show that unless one of the alternatives is the worst according to all preferences, then a 2-efficient equilibrium always exists.

Answer:

Claim: If none of the alternatives is the worst according to all agents' preferences, then there is an allocation such that no agent receives his worst alternative.

Proof: Let a be an allocation with the minimal number of agents who receive their worst alternative. Assume, for the purpose of contradiction, that this number is positive and let i be an agent who receives his worst alternative. Since no alternative is worst according to all agents, there is an individual j who does not consider $a(i)$ to be the worst alternative.

Let b be an allocation such that $b(i) = a(j)$, $b(j) = a(i)$, and $b(h) = a(h)$ for all $h \neq i,j$. The number of individuals who receive their worst alternative in b is smaller than in a, in contradiction to a having the minimal number of agents who receive their worst alternative.

Now, let a be an allocation in which no agent receives his worst alternative. For each agent, i, define S_i to be a set containing $a(i)$ and i's worst alternative. Clearly, $a(i)$ is best according to i in S_i.